

Risoluzione secondo esonero gennaio 2008.

Quesito 1.

Un intermediario finanziario possiede 100 azioni della società A e 75 della società B il cui valore unitario è rispettivamente 10 e 15 Euro.

Per coprirsi a due anni dal rischio di mercato compra un pari numero di put sulle due tipologie di azioni; le put in oggetto hanno strike price pari al 90% del valore corrente delle azioni. Le altre ipotesi del calcolo sono le seguenti: tasso risk free pari al 5%; rialzo e ribasso dell'azione A in un periodo pari a +/- 15%; rialzo e ribasso dell'azione B in un periodo pari a +/- 10%; le due azioni si muovono solo contemporaneamente al rialzo o contemporaneamente al ribasso.

Calcolare:

- A) I possibili tassi di rendimento in tutti i casi possibili (considerando il costo della copertura);
- B) Il tasso di rendimento atteso (utilizzando come probabilità quelle risk neutral)
- C) il valore a scadenza del portafoglio assicurato (azioni + put) in tutti i casi possibili.

Risoluzione.

Determiniamo innanzi tutto il valore delle opzioni put per le due tipologie di azioni.

Per quanto riguarda la società A, i dati sono i seguenti:

$$A_0 = 10; \quad K_A = 10 \cdot 0,90 = 9; \quad i = 5\%; \quad u = 1,15; \quad d = 0,85.$$

I possibili valori a scadenza dell'azione della società A saranno (nell'ambito del modello binomiale biperiodale):

$$A_T = \begin{cases} A_{uu} = A_0 \cdot u^2 = 13,225 \\ A_{ud} = A_0 \cdot u \cdot d = 9,775 \\ A_{dd} = A_0 \cdot d^2 = 7,225 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu}^A = \text{Max}(K_A - A_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^A = \text{Max}(K_A - A_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^A = \text{Max}(K_A - A_{dd}; 0) = 1,775 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,05-0,85}{0,30} = 0,6667.$$

Il valore della put con sottostante A vale perciò:

$$P^A = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu}^A + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud}^A + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}^A}{(1+i)^2} = 0,1789.$$

Per quanto riguarda la società B, i dati sono i seguenti:

$$B_0 = 15; \quad K_B = 15 \cdot 0,90 = 13,5; \quad i = 5\%; \quad u = 1,10; \quad d = 0,90.$$

I possibili valori a scadenza dell'azione della società B saranno:

$$B_T = \begin{cases} B_{uu} = B_0 \cdot u^2 = 18,15 \\ B_{ud} = B_0 \cdot u \cdot d = 14,85 \\ B_{dd} = B_0 \cdot d^2 = 12,15 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu}^B = \text{Max}(K_B - B_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^B = \text{Max}(K_B - B_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^B = \text{Max}(K_B - B_{dd}; 0) = 1,35 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,05-0,90}{0,20} = 0,75.$$

Il valore della put con sottostante B vale perciò:

$$P^B = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu}^B + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud}^B + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}^B}{(1+i)^2} = 0,0765.$$

Il costo della copertura tenendo conto delle quote $\alpha = 100$ e $\beta = 75$ vale:

$$C = \alpha \cdot P^A + \beta \cdot P^B = 23,63.$$

Il prezzo all'epoca zero del portafoglio (tenendo conto della copertura) è:

$$V_0 = 100 \cdot 10 + 75 \cdot 15 + 23,63 = 2.148,63.$$

Il valore a scadenza del portafoglio assicurato sarà dato dalla somma del valore a scadenza delle azioni con il valore a scadenza delle opzioni (ossia il loro pay-off), perciò:

$$V_T = \alpha \cdot A_T + \alpha \cdot \text{Max}(K_A - A_T; 0) + \beta \cdot B_T + \beta \cdot \text{Max}(K_B - B_T; 0).$$

Esaminiamo tutti i casi possibili (tenendo conto che le due azioni si muovono solo contemporaneamente al rialzo o contemporaneamente al ribasso):

$$V_T(uu) = 100 \cdot (13,225 + 0) + 75 \cdot (18,15 + 0) = 2.683,75$$

$$V_T(ud) = 100 \cdot (9,775 + 0) + 75 \cdot (14,85 + 0) = 2.091,25$$

$$V_T(dd) = 100 \cdot (7,225 + 1,775) + 75 \cdot (12,15 + 1,35) = 1912,50$$

I rendimenti netti nei tre casi valgono:

$$R(uu) = \sqrt{\frac{V_T(uu)}{V_0}} - 1 = 11,76\%$$

$$R(ud) = \sqrt{\frac{V_T(ud)}{V_0}} - 1 = -1,34\%$$

$$R(dd) = \sqrt{\frac{V_T(dd)}{V_0}} - 1 = -5,65\%$$

Il valore atteso del portafoglio a scadenza è:

$$V_{att} = 100 \cdot \left[\pi_A^2 \cdot (A_{uu} + P_{uu}^A) + 2\pi_A \cdot (1 - \pi_A) \cdot (A_{ud} + P_{ud}^A) + (1 - \pi_A)^2 \cdot (A_{dd} + P_{dd}^A) \right] + \\ + 75 \cdot \left[\pi_B^2 \cdot (B_{uu} + P_{uu}^B) + 2\pi_B \cdot (1 - \pi_B) \cdot (B_{ud} + P_{ud}^B) + (1 - \pi_B)^2 \cdot (B_{dd} + P_{dd}^B) \right] = 2.368,86$$

dove π_A e π_B sono le probabilità neutrali associate ad A e B rispettivamente.

Infine, il rendimento netto atteso è:

$$R(att) = \sqrt{\frac{V_{att}}{V_0}} - 1 = 5,00\%$$

Quesito 2.

Un intermediario finanziario possiede 10 azioni della società A e 8 della società B il cui valore unitario è rispettivamente 10 e 14 Euro.

Per coprirsi a due anni dal rischio di mercato compra un pari numero di put sulle due tipologie di azioni; le put in oggetto hanno strike price pari al 90% del valore corrente delle azioni. Le altre ipotesi del calcolo sono le seguenti: tasso risk free pari al 5%; rialzo e ribasso dell'azione A in un periodo pari a +/- 15%; rialzo e ribasso dell'azione B in un periodo pari a +/- 10%; le due azioni si muovono in modo diametralmente opposto (quando una sale, l'altra scende).

Calcolare:

- A) I possibili tassi di rendimento in tutti i casi possibili (considerando il costo della copertura);
- B) Il tasso di rendimento atteso (utilizzando come probabilità quelle risk neutral)
- C) il valore a scadenza del portafoglio assicurato (azioni + put) in tutti i casi possibili.

Risoluzione.

Determiniamo innanzi tutto il valore delle opzioni put per le due tipologie di azioni.

Per quanto riguarda la società A, i dati sono i seguenti:

$$A_0 = 10; \quad K_A = 10 \cdot 0,90 = 9; \quad i = 5\%; \quad u = 1,15; \quad d = 0,85.$$

I possibili valori a scadenza dell'azione della società A saranno (nell'ambito del modello binomiale biperiodale):

$$A_T = \begin{cases} A_{uu} = A_0 \cdot u^2 = 13,225 \\ A_{ud} = A_0 \cdot u \cdot d = 9,775 \\ A_{dd} = A_0 \cdot d^2 = 7,225 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu}^A = \text{Max}(K_A - A_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^A = \text{Max}(K_A - A_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^A = \text{Max}(K_A - A_{dd}; 0) = 1,775 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,05-0,85}{0,30} = 0,6667.$$

Il valore della put con sottostante A vale perciò:

$$P^A = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu}^A + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud}^A + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}^A}{(1+i)^2} = 0,1789.$$

Per quanto riguarda la società B , i dati sono i seguenti:

$$B_0 = 14; \quad K_B = 14 \cdot 0,90 = 12,6; \quad i = 5\%; \quad u = 1,10; \quad d = 0,90.$$

I possibili valori a scadenza dell'azione della società B saranno:

$$B_T = \begin{cases} B_{uu} = B_0 \cdot u^2 = 16,94 \\ B_{ud} = B_0 \cdot u \cdot d = 13,86 \\ B_{dd} = B_0 \cdot d^2 = 11,34 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu}^B = \text{Max}(K_B - B_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^B = \text{Max}(K_B - B_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^B = \text{Max}(K_B - B_{dd}; 0) = 1,26 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,05-0,90}{0,20} = 0,75.$$

Il valore della put con sottostante B vale perciò:

$$P^B = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu}^B + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud}^B + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}^B}{(1+i)^2} = 0,0714.$$

Il costo della copertura tenendo conto delle quote $\alpha = 10$ e $\beta = 8$ vale:

$$C = \alpha \cdot P^A + \beta \cdot P^B = 2,36.$$

Il prezzo all'epoca zero del portafoglio (tenendo conto della copertura) è:

$$V_0 = 10 \cdot 10 + 8 \cdot 14 + 2,36 = 214,36.$$

Il valore a scadenza del portafoglio assicurato sarà dato dalla somma del valore a scadenza delle azioni con il valore a scadenza delle opzioni (ossia il loro pay-off), perciò:

$$V_T = \alpha \cdot A_T + \alpha \cdot \text{Max}(K_A - A_T; 0) + \beta \cdot B_T + \beta \cdot \text{Max}(K_B - B_T; 0).$$

Esaminiamo tutti i casi possibili (tenendo conto che le due azioni si muovono in modo diametralmente opposto):

$$V_T(uu) = 10 \cdot (13,225 + 0) + 8 \cdot (11,34 + 1,26) = 233,05$$

$$V_T(ud) = 10 \cdot (9,775 + 0) + 8 \cdot (13,86 + 0) = 208,63$$

$$V_T(dd) = 10 \cdot (7,225 + 1,775) + 8 \cdot (16,94 + 0) = 225,52$$

I rendimenti netti nei tre casi valgono:

$$R(uu) = \sqrt{\frac{V_T(uu)}{V_0}} - 1 = 4,27\%$$

$$R(ud) = \sqrt{\frac{V_T(ud)}{V_0}} - 1 = -1,35\%$$

$$R(dd) = \sqrt{\frac{V_T(dd)}{V_0}} - 1 = 2,57\%$$

Il valore atteso del portafoglio a scadenza è:

$$V_{att} = 100 \cdot \left[\pi_A^2 \cdot (A_{uu} + P_{uu}^A) + 2\pi_A \cdot (1 - \pi_A) \cdot (A_{ud} + P_{ud}^A) + (1 - \pi_A)^2 \cdot (A_{dd} + P_{dd}^A) \right] + \\ + 75 \cdot \left[\pi_B^2 \cdot (B_{uu} + P_{uu}^B) + 2\pi_B \cdot (1 - \pi_B) \cdot (B_{ud} + P_{ud}^B) + (1 - \pi_B)^2 \cdot (B_{dd} + P_{dd}^B) \right] = 236,33$$

dove π_A e π_B sono le probabilità neutrali associate ad A e B rispettivamente.

Infine, il rendimento netto atteso è:

$$R(att) = \sqrt{\frac{V_{att}}{V_0}} - 1 = 5,00\% .$$

Quesito 3.

Un investitore possiede un portafoglio con scadenza 2 anni formato da:

- uno zero coupon bond $z_1 = (-100; 110,25) / (0; 2)$
- 20 azioni che quotano oggi 5 Euro;
- 20 call con strike price 4,75 Euro.

Sapendo che $u = 1,15$; $d = 0,85$; $i(0; 1) = i(0; 2) = 0,05$ calcolare:

- a) il valore in $t = 0$ del portafoglio complessivo considerando il valore delle call;
- b) i possibili valori in $t = 2$ del portafoglio;
- c) i rendimenti netti tra 0 ed 2 del portafoglio nei casi possibili.

Risoluzione.

Determiniamo il valore della call. I possibili valori a scadenza dell'azione saranno (nell'ambito del modello binomiale biperiodale):

$$A_T = \begin{cases} A_{uu} = A_0 \cdot u^2 = 6,6125 \\ A_{ud} = A_0 \cdot u \cdot d = 4,8875 \\ A_{dd} = A_0 \cdot d^2 = 3,6125 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu} = \text{Max}(A_{uu} - K; 0) = 1,8625 \\ P_{ud} = \text{Max}(A_{ud} - K; 0) = 0,1375 \\ P_{dd} = \text{Max}(A_{dd} - K; 0) = 0 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,05-0,85}{0,3} = 0,6667.$$

Il valore della call con sottostante A vale perciò:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}}{(1+i)^2} = 0,8062$$

Il valore del portafoglio in $t = 0$ è:

$$V_0 = 20 \cdot (5 + 0,8062) + 100 = 216,12.$$

Il valore del portafoglio in $t = 2$ è:

$$V_2 = 20 \cdot A_T + 20 \cdot \text{Max}(A_T - K; 0) + 110,25$$

perciò i tre casi possibili sono:

$$V_2(uu) = 20 \cdot 6,6125 + 20 \cdot 1,8625 + 110,25 = 279,75$$

$$V_2(ud) = 20 \cdot 4,8875 + 20 \cdot 0,1375 + 110,25 = 210,75$$

$$V_2(dd) = 20 \cdot 3,6125 + 20 \cdot 0 + 110,25 = 182,50$$

Infine i rendimenti netti nei tre casi valgono:

$$R(uu) = \sqrt{\frac{V_2(uu)}{V_0}} - 1 = 13,77\%$$

$$R(ud) = \sqrt{\frac{V_2(ud)}{V_0}} - 1 = -1,25\%$$

$$R(dd) = \sqrt{\frac{V_2(dd)}{V_0}} - 1 = -8,11\%$$

Quesito 4.

Un investitore possiede un portafoglio con scadenza 2 anni formato da:

- uno zero coupon bond $z_1 = (-100; 110,25) / (0; 2)$
- 20 azioni che quotano oggi 5 Euro;
- 20 put con strike price 4,75 Euro.

Sapendo che $u = 1,15$; $d = 0,85$; $i(0; 1) = i(0; 2) = 0,05$ calcolare:

- a) Il valore in $t = 0$ del portafoglio complessivo considerando il valore delle put;
- b) Il rendimento atteso del portafoglio utilizzando come probabilità dei diversi percorsi le probabilità risk neutral.

Risoluzione.

Determiniamo il valore della put. I possibili valori a scadenza dell'azione saranno (nell'ambito del modello binomiale biperiodale):

$$A_T = \begin{cases} A_{uu} = A_0 \cdot u^2 = 6,6125 \\ A_{ud} = A_0 \cdot u \cdot d = 4,8875 \\ A_{dd} = A_0 \cdot d^2 = 3,6125 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu} = \text{Max}(K - A_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud} = \text{Max}(K - A_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd} = \text{Max}(K - A_{dd}; 0) = 1,1375 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,05-0,85}{0,3} = 0,6667.$$

Il valore della put con sottostante A vale perciò:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu} + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud} + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}}{(1+i)^2} = 0,1146$$

Il valore del portafoglio in $t = 0$ è:

$$V_0 = 20 \cdot (5 + 0,1146) + 100 = 202,2928.$$

Il valore del portafoglio in $t = 2$ è:

$$V_2 = 20 \cdot A_T + 20 \cdot \text{Max}(K - A_T; 0) + 110,25$$

perciò i tre casi possibili sono:

$$V_2(uu) = 20 \cdot 6,6125 + 20 \cdot 0 + 110,25 = 242,50$$

$$V_2(ud) = 20 \cdot 4,8875 + 20 \cdot 0 + 110,25 = 208,00$$

$$V_2(dd) = 20 \cdot 3,6125 + 20 \cdot 1,1375 + 110,25 = 205,25$$

Il rendimento atteso all'epoca due è:

$$V_2(att) = \pi^2 \cdot V_2(uu) + 2\pi \cdot (1 - \pi) \cdot V_2(ud) + (1 - \pi)^2 \cdot V_2(dd) = 223,0278.$$

Infine il rendimento atteso netto vale:

$$R(att) = \sqrt{\frac{V_2(att)}{V_0}} - 1 = 5,00\%.$$

Quesito 5.

Dal Sole 24 Ore del 12 gennaio 2008 si evince che il BTP IT0004284334 paga una cedola di 4,25 frazionata il 15.4 ed il 15.10. Calcolare il Rateo alla data di valutazione.

Titolo		Codice Isin	Cedola		Imposta Rateo sostituit.	Prezzo uffic. 11.01	Rendim.		Durat. (Anni, mesi, giorni)	Vol. %	Prezzo min/max	Qtà € (mlg)	MTS Prezzo med.p.	TLX Prezzo Close
Date godim.	Spread Tipo ind.		att.	fut.			lordo	netto						
Buoni Tesoro poliennali														
01-02s1.2.2012		IT0003190912	5.00	—	2,28261	0,28533	103,630	4,05 3,43	3,251	3,57	-0,10/+0,13	10592	103,630	103,81
15-04s15.4.2012		IT0004220627	4.00	—	1,01639	0,13838	99,850	4,07 3,55	3,348	3,82	-0,13/+0,15	16171	99,810	100,01
15-03s15.9.2012 ☆		IT0004216351	1.85	—	0,62514	0,07814	100,030	5,46 4,76	4,181	3,22	-0,10/+0,06	919	99,980	100,10
15-04s15.10.2012		IT0004284334	4.25	—	0,13594	0,00000	100,780	4,10 3,56	4,132	4,21	-0,17/+0,14	9842	100,720	100,95

Risoluzione.

Diamo innanzitutto qualche approfondimento riguardante il mercato italiano delle obbligazioni.

Nel mercato italiano esiste, fra i titoli emessi dallo Stato, un unico esempio di zcb: si tratta dei **Buoni Ordinari del Tesoro** (BOT) emessi dal Tesoro per fronteggiare temporanee esigenze di cassa da parte della Tesoreria dello Stato. La loro emissione avviene ogni quindici giorni ed hanno scadenza pari a tre, sei o dodici mesi. Le modalità di emissione sono quelle di un'asta alla quale possono partecipare in qualità di potenziali acquirenti istituti bancari ed altri organismi di intermediazione finanziaria riconosciuti come dealers.

Fissato il valore di rimborso, i valori d'asta sono i prezzi ai quali gli operatori sono disposti ad acquistare. Ogni emissione è divisa in "tranches", ciascuna messa in asta separatamente. La media dei prezzi delle diverse tranches va a costituire il **prezzo di emissione** (prezzo medio di aggiudicazione) cui fare riferimento per gli aspetti fiscali dell'operazione.

Il valore nominale di ogni emissione, che rappresenta anche il taglio minimo acquistabile di questa tipologia di titoli, è fissato in mille euro. Una volta acquistati dagli investitori istituzionali che hanno partecipato al collocamento, i BOT sono trattati sul mercato secondario in base alle quotazioni come risultano dall'interazione fra domanda e offerta.

Il regime fiscale di questi titoli prevede un prelievo alla fonte nella misura del 12.5% sulla differenza fra il valore di rimborso ed il prezzo medio di aggiudicazione. L'acquirente originario dell'emissione paga il prezzo risultante dalla procedura d'asta più l'importo che corrisponde all'imposta, affrancando eventuali futuri acquirenti da ogni obbligo fiscale. E' ovvio che il dealer, al

momento di vendere i titoli, tiene conto dell'imposta pagata e quindi il prezzo di vendita che propone è comprensivo di quest'ultima. Le quotazioni riportate sui listini sono fatte convenzionalmente su base 100, come se tale fosse il valore di rimborso.

I bullet bonds emessi dallo Stato e circolanti sul mercato italiano sono i **Buoni Poliennali del Tesoro** (BTP) emessi dal Tesoro per fronteggiare impegni di spesa a lungo termine (opere pubbliche, interventi di sostegno a determinate categorie, ecc ...). Le loro scadenze possono essere tre, cinque, sette e dieci anni. Di recente si sono verificate anche delle emissioni trentennali. I titoli in questione portano **cedole** che sono pagabili **semestralmente** con un rimborso finale del capitale. Il taglio al quale sono emessi è di mille euro e il meccanismo di emissione è ancora a mezzo asta analogo a quello già visto per i BOT. L'emissione avviene a un prezzo d'asta inferiore a quello di rimborso K per cui le emissioni sono del tipo **sotto la pari** (si dice invece sopra la pari se il prezzo di emissione è superiore a K , e alla pari in caso di uguaglianza). Questa procedura ha delle ripercussioni sul regime fiscale in quanto, a scadenza il portatore del titolo deve pagare l'imposta anche sul cosiddetto **capital gain** rappresentato dalla differenza $K - P$.

A differenza dei BOT, tassati alla fonte in modo definitivo, i BTP prevedono che chi incassa la cedola paghi l'imposta pari al 12.5% e che un'uguale aliquota sia applicata al rimborso sul capital gain. Il portatore del titolo paga l'imposta tramite rivalsa, nel senso che questa gli viene trattenuta sulle somme a lui dovute a titolo di cedola o di rimborso finale.

Le quotazioni che sono riportate nei listini e che sintetizzano i prezzi di negoziazione dei BTP giorno dopo giorno, non tengono conto della cedola maturata fino a quel momento. Ciò lo si deve all'esigenza di omogeneizzare le quotazioni poiché un titolo assai vicino alla scadenza di una cedola conterrebbe nel prezzo anche questa componente, mentre uno la cui cedola è stata pagata di recente ne sarebbe privo. La quotazione al netto della cedola maturata fino a quel giorno (pertanto di spettanza al venditore del titolo) è detta quotazione al secco (**corso secco**), mentre il prezzo effettivo, ottenuto sommando al corso secco la quota di cedola da corrispondere al venditore, quota chiamata **rateo**, costituisce il corso **tel quel**. Il corso secco e il corso tel quel coincidono ovviamente se la data di transazione coincide con la data di stacco di una cedola.

Il calcolo del rateo è effettuato moltiplicando l'ammontare della cedola in corso per la frazione ottenuta rapportando all'intero intervallo fra due cedole (ossia sei mesi per un BTP) la parte che va dalla data di ultimo pagamento a quella cui la quotazione si riferisce. Di conseguenza, se indichiamo con τ_j l'epoca di pagamento della cedola successiva mentre τ_{j-1} rappresenta quella dell'ultimo pagamento, se inoltre τ è il momento della quotazione si ha che il rateo è definito dalla seguente relazione:

$$\text{Rateo} = \frac{\tau - \tau_{j-1}}{\tau_j - \tau_{j-1}} \cdot C$$

dove C rappresenta l'ammontare della cedola. Osserviamo che il numeratore $\tau - \tau_{j-1}$ rappresenta i giorni di maturazione della cedola in corso. La convenzione utilizzata dal Sole 24 Ore è di aggiungere tre giorni banca al numeratore.

Nei listini, accanto al corso secco del titolo è riportato anche il rateo corrispondente.

I titoli a cedola variabile di emissione pubblica negoziati sul mercato italiano sono i **Certificati di Credito del Tesoro** (CCT). In tutto simili ai BTP si differenziano da questi per l'ammontare della cedola. Questa, infatti, è variabile ed è scindibile in due componenti: lo spread, percentuale fissata all'emissione, e la parte propriamente variabile calcolata in relazione ai tassi di rendimento dei BOT

nel periodo precedente la maturazione della cedola medesima. Titoli di questo tipo (detti a indicizzazione parziale per la presenza della componente fissa della cedola, rappresentata dallo spread) sono in grado di adeguarsi alle variazioni delle condizioni del mercato proprio in virtù del loro legame con i rendimenti prevalenti nel periodo. In periodi di elevata inflazione, quando parte dei rendimenti possono essere erosi a causa del deprezzamento della moneta, i CCT hanno rappresentato una valida alternativa alle forme d'investimento tradizionale caratterizzate da rendimento fisso.

I CCT, in virtù del particolare meccanismo in base al quale è determinato l'ammontare della cedola, generano un flusso del quale è noto solo il primo elemento (l'entità della prossima cedola in scadenza), mentre gli altri importi vengono a dipendere dalle condizioni del mercato che si presenteranno in futuro. L'investimento in questa tipologia di titoli assume dunque caratteri di aleatorietà che si ripercuotono sia sulle modalità di valutazione sia sulla determinazione degli indici di redditività.

Procediamo ora alla risoluzione del quesito. Il *BTP* paga una cedola semestrale pari a *Euro 2,125* (la prossima cedola sarà corrisposta il 15 aprile 2008). Il numero di giorni di maturazione della cedola in corso (dal 15 ottobre 2007 all'epoca di valutazione che è l'11 gennaio 2008) con la convenzione adottata dal Sole 24 Ore è pari a 93 (88 giorni fino all'11 gennaio 2008, più tre giorni banca escludendo i sabati e le domeniche successivi al giorno di valutazione). I giorni del semestre sono quelli effettivi (183 giorni dal 15 ottobre 2007 al 15 aprile 2008).

Per determinare il rateo, dovremo perciò utilizzare la formula data prima:

$$rateo = \frac{93}{183} \cdot 2,125 = 1,0799$$

Quesito 6.

Dal Sole 24 Ore del 12 gennaio 2008: calcolare il TIR su base solare del BTP IT0004008121.

Titolo		Codice Isin	Cedola		Imposta Rateo sostitut.	Prezzo uffic. 11.01	Rendim. effettivo %		Durat. (Anni, giorni)
Date godim.	Spread Tipo ind.		att.	fut.			lordo	netto	
Buoni Tesoro poliennali									
15-04s15.4.2009	P	IT0003652077	3.00	—	0,76230 0,22480	98,870	3,97	3,56	1,083
01-02s1.2.2009	P	IT0004008121	3.00	—	1,36957 0,18585	98,990		3,62	1,011
23-05s1.5.2009	P	IT0003377768	3.50	—	0,73858 0,21773	98,770	4,04	3,70	1,155

Risoluzione.

Indichiamo con i il TIR (rendimento effettivo lordo) e con $v = \frac{1}{1+i}$ il relativo fattore di sconto. Il

BTP paga cedole semestrali pari a 1,5 (ad iniziare dal 1 febbraio 2008), con scadenza il primo febbraio 2009. Il prezzo alla data di valutazione del 11 gennaio 2008 è $P = 98,99$ mentre il rateo vale $R = 1,36957$. Ci sono inoltre 20 giorni tra la data di valutazione e la data del pagamento della prima cedola. Potremo quindi scrivere l'equazione di equilibrio finanziario:

$$P + R = 100,35957 = 1,5 \cdot v^{\frac{20}{366}} + 1,5 \cdot v^{\frac{20}{366} + \frac{1}{2}} + 101,5 \cdot v^{\frac{20}{366} + 1}$$

RisolviAMO infine col metodo dell'interpolazione. Si trova $i \approx 4,01\%$.

Quesito 7.

Calcolare il prezzo mancante nel prospetto del Sole 24 Ore del 12 gennaio 2008 seguente.

Titolo		Codice Isin	Cedola		Imposta Rateo sostitut.	Prezzo uffic. 11.01	Rendim.		Durat. (Anni, giorni)
Date godim.	Spread Tipo ind.		att.	fut.			lordo	netto	
Buoni Tesoro poliennali									
15-04s15.4.2009	P	IT0003652077	3.00	—	0,76230 0,22480	98,870	3,97	3,56	1,083
01-02s1.2.2009	P	IT0004008121	3.00	—	1,36957 0,18585		4,01	3,62	1,011
23-05s1.5.2009	P	IT0003777768	3.50	—	0,73858 0,21373				

Risoluzione.

I dati sono quelli del quesito precedente. Il prezzo P si ottiene dalla relazione:

$$P = 100,35957 = 1,5 \cdot v^{\frac{20}{366}} + 1,5 \cdot v^{\frac{20}{366} + \frac{1}{2}} + 101,5 \cdot v^{\frac{20}{366} + 1} - R$$

dove $v = 1,0401^{-1} = 0,961446$. Si ottiene infine $P = 98,99$.

Quesito 8.

Calcolare la Duration mancante nel prospetto del Sole 24 Ore del 12 gennaio 2008 seguente.

Titolo		Codice Isin	Cedola		Imposta Rateo sostitut.	Prezzo uffic. 11.01	Rendim.		Durat. (Anni, giorni)
Date godim.	Spread Tipo ind.		att.	fut.			lordo	netto	
Buoni Tesoro poliennali									
15-04s15.4.2009	P	IT0003652077	3.00	—	0,76230 0,22480	98,870	3,97	3,56	
01-02s1.2.2009	P	IT0004008121	3.00	—	1,36957 0,18585	98,990	4,01	3,62	1,011
23-05s1.5.2009	P	IT0003777768	3.50	—	0,73858 0,21373	98,370	4,01	3,58	1,153

Risoluzione.

Il BTP prevede delle cedole semestrali pari a *Euro 1,5* la prima delle quali il 15 aprile 2008 (95 giorni dalla data di valutazione). La scadenza del titolo è il 1 febbraio 2009.

Applichiamo la definizione di duration considerando come fattore di sconto

$$v = 1,0397^{-1} = 0,961816.$$

Si ha:

$$D = \frac{\left(\frac{95}{366}\right) \cdot 1,5 \cdot v^{\frac{95}{366}} + \left(\frac{95}{366} + \frac{1}{2}\right) \cdot 1,5 \cdot v^{\frac{95}{366} + \frac{1}{2}} + \left(\frac{95}{366} + 1\right) \cdot 101,5 \cdot v^{\frac{95}{366} + 1}}{1,5 \cdot v^{\frac{95}{366}} + 1,5 \cdot v^{\frac{95}{366} + \frac{1}{2}} + 101,5 \cdot v^{\frac{95}{366} + 1}} \approx 1,23$$

La duration è pari ad un anno e 83 giorni.